

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel.

Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de  $u_n$ .

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
        |   u = ...
    return u
```

3.
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 2n$ .
  - b. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - c. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier  $n_0$  tel que, pour tout entier naturel  $n$  vérifiant,  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 10^p$ ?
4. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
5. On considère la suite  $(v_n)$ , définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $v_n = u_n - 2n + 1$ .
  - a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):  
    L = []  
    for i in range(n+1) :  
        | L.append(suite_u(i) - 2*i + 1)  
    return L
```

*La commande «L.append» permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.*

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)  
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .

Démontrer cette conjecture.

**b.** En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , la forme explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$ .